

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

© Н.С. БАХТИЙ<sup>1</sup>, М.В. АБДУЛИНА<sup>2</sup>, Ю.И. МОКРОПУЛО<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Тюменское отделение «СургутНИПИнефть» ОАО «Сургутнефтегаз»

<sup>1</sup>Тюменский государственный университет

bahtiy\_ns@surgutneftegas.ru, abdulina\_mv@surgutneftegas.ru,  
mokropulo\_ui@surgutneftegas.ru

УДК 532.68, 004.415.53

## **РАВНОВЕСИЕ И ФИЛЬТРАЦИЯ НЕФТИ И ВОДЫ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ КАПИЛЛЯРНЫХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛ**

### **INFLUENCE OF CAPILLARY AND GRAVITY FORCES ON EQUILIBRIUM AND TRANSPORT OF OIL AND WATER IN POROUS MEDIA**

Капиллярные и гравитационные эффекты оказывают существенное влияние как на начальное распределение нефти и воды в пласте, так и на процесс фильтрации при разработке месторождений. Аналитическое решение фильтрационных задач ввиду их сложности возможно только для некоторых относительно простых частных случаев, поэтому, как правило, используются численные методы. Однако аналитические решения полезны для лучшего понимания физических процессов и верификации численного решения.

В данной статье представлены численные решения трех одномерных двухфазных (нефть + вода) задач подземной гидродинамики: капиллярно-гравитационное равновесие в неоднородном пласте, гравитационная сегрегация двух фаз, задача капиллярной пропитки гидрофильного коллектора. Проведено сравнение численных и аналитических решений этих задач. Исследована погрешность численных решений от размерности расчетной сетки.

*Influence of capillary and gravity forces is significant for both initial equilibrium and fluid dynamics during oil recovery. Analytical solutions of reservoir engineering problems can be rarely obtained due to complexity of the problems. Therefore, these problems are usually solved numerically. But analytical solutions are important for both better understanding of the physical process and verification of numerical schemes. Numerical solutions of three 1D two-phase reservoir simulation problems are obtained:*

*equilibrium of oil and water in a heterogeneous reservoir, gravity flow of oil and water, imbibition in water-wet media. Comparison of these solutions and analytical solutions is presented, as well as the refinement test of the problems.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Моделирование пластовых систем, безнапорная фильтрация, капиллярная пропитка, конечно-разностные методы.

**KEY WORDS.** Reservoir simulation, gravity flow, imbibition, finite difference methods.

Погрешность численного решения фильтрационных уравнений исследовалась в [1]. Задача капиллярно-гравитационного равновесия и точность ее решения в зависимости от расчетной сетки рассмотрены в [2]. Отличием решения, представленного в данной статье, является неоднородность капиллярного давления и, как следствие, немонотонный характер начальной водонасыщенности.

Аналитические решения задачи гравитационной сегрегации получены в [3] для бесконечной области и в [4] для конечной области. Численное решение задачи [4] на сетке 25 расчетных слоев представлено в [5].

Приближенные аналитические решения задачи капиллярной пропитки даны в работах [6; 7] для бесконечной области и в [8] для конечной области.

В данной статье получены численные решения всех трех задач на сетках с шагом 1 м, 0.4 м и 0.2 м. Две гидродинамические задачи решены методами IMPES (неявная по давлению, явная по насыщенности) и FI (полностью неявная) [1]. Во всех задачах рассматривается однородный пласт, сжимаемостью флюидов пренебрегают ( $\phi, k, \rho_o, \rho_w, \mu_o, \mu_w$  — константы). Все численные решения, представленные в статье, получены с использованием программного комплекса «Техсхема» [9].

**Уравнения фильтрации.** Скорости фильтрации нефти и воды в одномерном случае в декартовой системе координат описываются обобщенным законом Дарси:

$$u_o = -k \frac{k_{ro}}{\mu_o} \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \rho_o g \frac{\partial D}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$u_w = -k \frac{k_{rw}}{\mu_w} \left( \frac{\partial p_w}{\partial x} - \rho_w g \frac{\partial D}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Насыщенности и давления нефти и воды связаны следующими соотношениями:

$$s_o + s_w = 1, \quad (3)$$

$$p_o - p_w = P_c(x, s_w). \quad (4)$$

С учетом (1) — (4) уравнения сохранения нефти и воды имеют вид:

$$-\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} = -\frac{\partial u_o}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{k_{ro}}{\mu_o} \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \rho_o g \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right], \quad (5)$$

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} = -\frac{\partial u_w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{k_{rw}}{\mu_w} \left( \frac{\partial p_w}{\partial x} - \rho_w g \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]. \quad (6)$$

Суммируя (5) и (6), получим:

$$\frac{\partial(u_o + u_w)}{\partial x} = 0 \Rightarrow u_t = u_o + u_w = u_t(t). \quad (7)$$

В данной статье рассматриваются задачи в ограниченной области, одна из точек которой (либо кровля, либо подошва пласта, либо обе вместе) непроницаема. В такой точке  $u_o(x_*) = u_w(x_*) = 0 \Rightarrow u_t(x_*) = 0$ . Отсюда, с учетом (7), для любого  $x$  справедливо:

$$u_t = u_o + u_w = 0. \quad (8)$$

Таким образом, нефть и вода одновременно неподвижны или движутся в разные стороны с одной скоростью фильтрации. Подставив (1) и (2) в (8), получим выражение для  $\partial p_o / \partial x$ , после подстановки которого в (2) имеем:

$$u_w = -kF(s_w) \left( (\rho_o - \rho_w)g \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial P_c}{\partial x} \right), \quad (9)$$

где

$$F(s_w) = \frac{k_{rw} / \mu_w k_{ro} / \mu_o}{k_{rw} / \mu_w + k_{ro} / \mu_o}. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (6), получим уравнение только относительно водонасыщенности:

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ kF(s_w) \left( (\rho_o - \rho_w)g \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial P_c}{\partial x} \right) \right]. \quad (11)$$

**Капиллярно-гравитационное равновесие.** Рассмотрим одномерную задачу капиллярно-гравитационного равновесия нефти и воды (ось  $x$  направлена вертикально вниз, т. е.  $\partial D / \partial x = 1$ , начало координат отсчитывается от уровня моря).

Коэффициент  $k \frac{k_{rp}}{\mu_p}$  характеризует подвижность фазы  $p$ . По определению, в переходной зоне (зоне между водонефтяным контактом, ниже которого водонасыщенность равна максимальной, и глубиной, выше которой наблюдается только остаточная водонасыщенность) подвижны и нефть, и вода, поэтому  $k \frac{k_{ro}}{\mu_o} > 0, k \frac{k_{rw}}{\mu_w} > 0$ , следовательно, выражения в скобках в (1) и (2) равны нулю. С учетом этого и (4), разность (1) и (2) равна:

$$\frac{\partial P_c}{\partial x} = \gamma, \quad (12)$$

где введено обозначение  $\gamma = (\rho_o - \rho_w)g$ . Для несжимаемого случая  $\gamma = const$ . Интегрируя уравнение (12) от  $x$  до  $x_{ВНК}$ , с учетом  $P_c(x_{ВНК}) = 0$ , получим:

$$P_c(x) = \gamma(x - x_{ВНК}). \quad (13)$$

Зависимость капиллярного давления от свойств породы и водонасыщенности часто представляют в виде:

$$P_c(x, s_w) = \varphi(x)J(s_w), \quad (14)$$

где  $\varphi(x) = \sigma \cos \theta \cdot \sqrt{\phi/k}$  — максимальное капиллярное давление;  $J(s_w)$  —  $j$ -функция Леверетта. Для данной задачи примем:

$$\varphi(x) = 0.0001x^2 - 0.404x + 408.5 \text{ МПа}, x_{\text{ВНК}} = 2015 \text{ м}, \rho_o = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \rho_w = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad (15)$$

$$J(s_w) = (1 - s_w)^2. \quad (16)$$

Подставляя (15) — (16) в (14) и выражая  $s_o = 1 - s_w$ , с учетом переводных коэффициентов получим:

$$s_o(x) = \sqrt{\frac{-0.00196(x - 2015)}{0.0001x^2 - 0.404x + 408.5}}. \quad (17)$$

Ввиду однозначности зависимости (16) экстремумы функций  $J(x)$  и  $s_o(x)$  совпадают. Для выбранных параметров один из двух экстремумов  $x_* = 2003.82 \text{ м}$  расположен выше ВНК. На рис. 1 представлено сравнение нефтенасыщенности, определенной по (17), с численным решением на сетках  $\Delta x = 0.2 \text{ м}$ ;  $\Delta x = 0.4 \text{ м}$ ;  $\Delta x = 1 \text{ м}$  между кровлей  $x_{\text{top}} = 1990 \text{ м}$  и подошвой  $x_{\text{bottom}} = 2020 \text{ м}$  пласта. Следует отметить хорошее совпадение аналитического и численного решения на всех сетках.

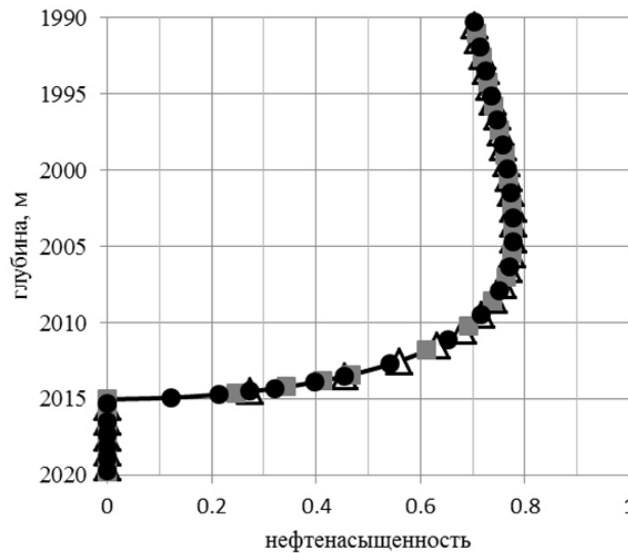


Рис. 1. Распределение нефтенасыщенности по глубине пласта для сеток с разным шагом: сплошная линия — аналитическое решение, треугольник — шаг 1 м, квадрат — шаг 0,4 м, круг — шаг 0,2 м

Однако из-за использования средней нефтенасыщенности в ячейке при подсчете запасов погрешность в определении запасов может быть более существенной. Для уменьшения этой погрешности начальное состояние может быть рассчитано на более мелкой сетке, чем исходная [2]. Для данной задачи запасы, получаемые на всех сетках, не отклоняются от точного значения более чем на 1%.

**Установление гравитационного равновесия.** В [4] описан метод получения точного решения задачи об установлении гравитационного разделения двух несжимаемых фаз, первоначально насыщающих пласт заданной толщины произвольным образом. При получении этого решения использовался метод, описанный в [10]. Данная задача описывается уравнением (11) при  $P_c = 0$  (капиллярными силами пренебрегают). Рассматривается несжимаемый и изотропный пласт. В начальный момент времени в верхней части толщины  $h$  этого пласта содержится вода, а в нижней — нефть. Распределение нефтенасыщенности  $s_o$  по высоте пласта в момент времени  $t$  приведено на рис. 2 [5] при условии, что на флюиды действуют только силы тяжести, относительные проницаемости воды и нефти заданы в виде  $k_{rw} = s_w$  и  $k_{ro} = s_o$ , динамические вязкости этих флюидов одинаковы.

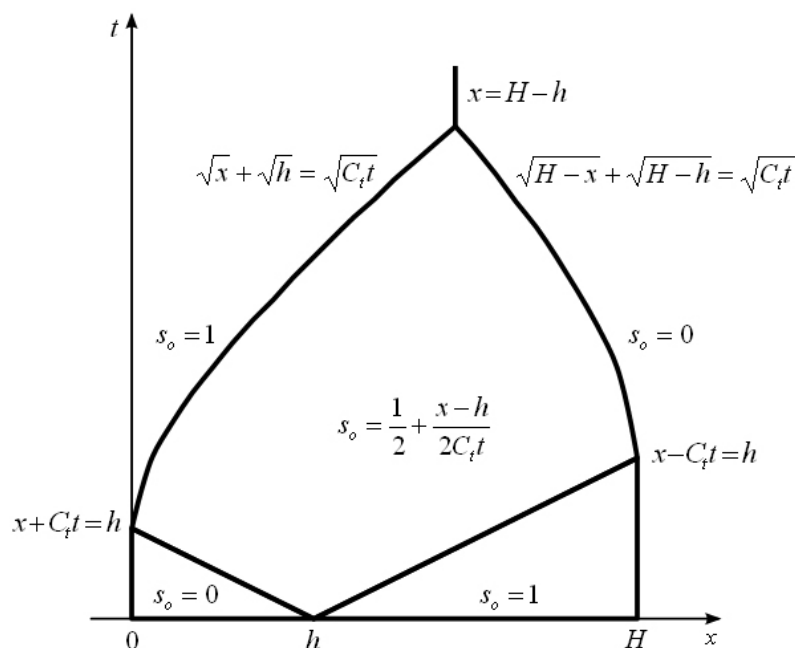


Рис. 2. Поведение функции  $s_o(x, t)$

В процессе установления гравитационного равновесия интерес представляют моменты времени:  $t_l = h/C_i$  — время достижения кровли пласта «первыми каплями» нефти,  $t_h = (H-h)/C_i$  — время достижения подошвы пласта «первыми каплями» воды,  $t_e = (\sqrt{h} + \sqrt{H-h})^2 / C_i$  — время установления гравитационного равновесия между водой и нефтью, где  $C_i = \frac{-k_z \gamma}{0,5(\mu_w + \mu_o)\phi H}$ .

Данное точное решение использовалось для тестирования гидродинамического симулятора «Техсхема» [9]. Значения параметров пласта и насыщающих его флюидов, а также характерные моменты времени, при которых проводилось сравнение аналитических и численных результатов, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения параметров пласта и флюидов, моменты времени

Параметр	Значение	Параметр	Значение	Параметр	Значение
$H$	10 м	$\rho_w$	1000 кг/м <sup>3</sup>	$g$	9,8 м/сек <sup>2</sup>
$h$	4 м	$\rho_o$	800 кг/м <sup>3</sup>	$t_l$	0,4
$\phi$	0,25	$\mu_w$	0,5 мПа·сек	$t_h$	0,6
$k_z$	0,0101 мкм <sup>2</sup>	$\mu_o$	0,5 мПа·сек	$t_e$	1,98

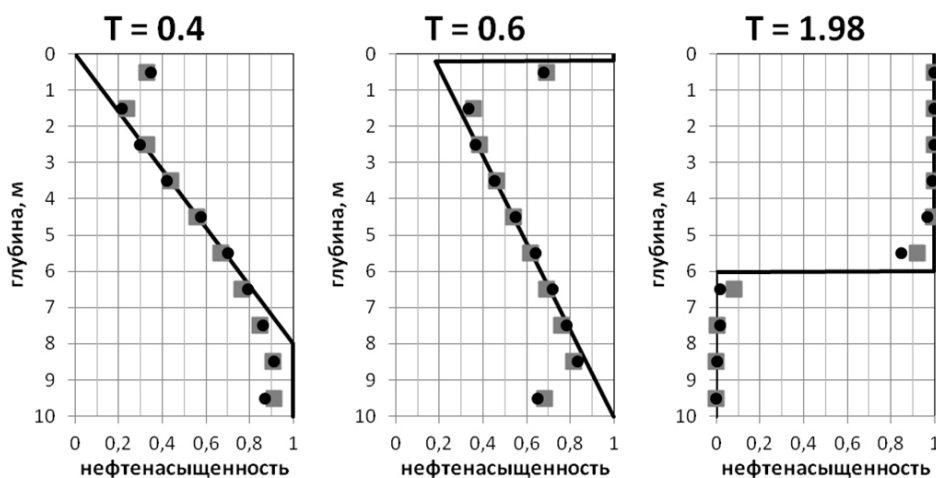


Рис. 3. Нефтенасыщенность по глубине пласта (сетка с шагом 1 м): сплошная линия — аналитическое решение, квадрат — IMPES, круг — FI

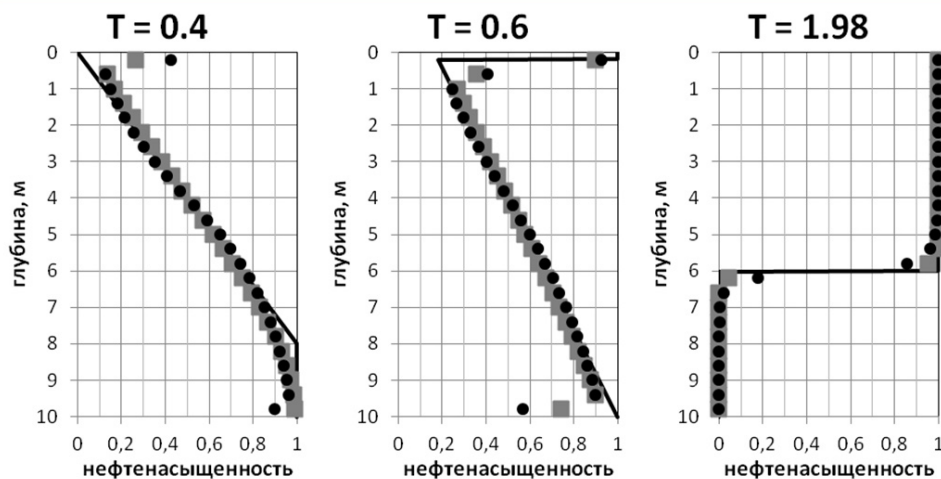


Рис. 4. Нефтенасыщенность по глубине пласта (сетка с шагом 0,4 м): сплошная линия — аналитическое решение, квадрат — IMPES, круг — FI

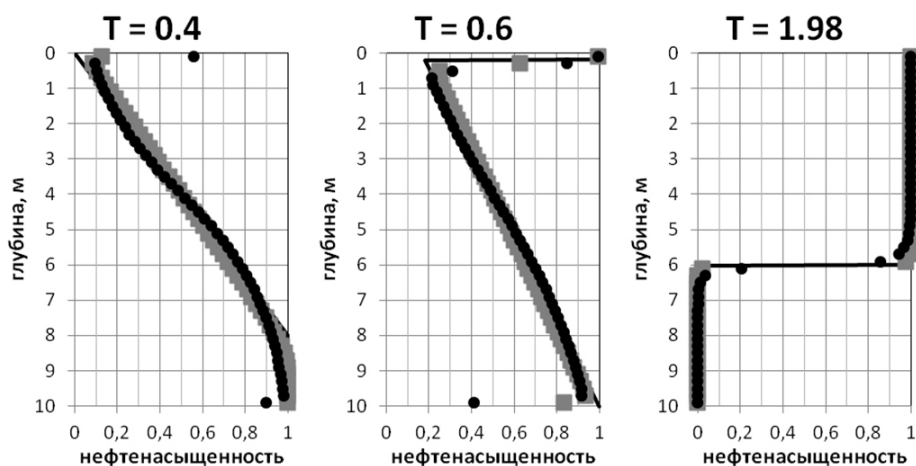


Рис. 5. Нефтенасыщенность по глубине пласта (сетка с шагом 0,2 м): сплошная линия — аналитическое решение, квадрат — IMPES, круг — FI

Из полученных численных расчетов (см. рис. 3-5) видно, что и явная, и неявная схемы расчета «размывают» скачок насыщенности, причем неявная схема — сильнее. Кроме того, при увеличении количества расчетных ячеек численные расчеты лучше согласуются с точным решением.

**Капиллярная пропитка.** Рассматривается задача, описанная в статье [8]. Изначально цилиндрический образец пористой среды, боковая поверхность и правый конец которого непроницаемы, насыщен нефтью. Левый конец образца ( $x = 0$ ) приводится в соприкосновение с водой, что инициирует течение воды внутрь образца и нефти — наружу. Необходимо найти водонасыщенность, как функцию  $x$  и  $t$ . Данная задача описывается уравнением (11) при  $g = 0$  (гравитационными силами пренебрегают). В [8] получено приближенное квазистационарное аналитическое решение данной задачи, основанное на заданной скорости продвижения фронта водонасыщенности:

$$s_w(x, t) = \left( -c \ln \left\{ 1 - (1 - e^{-c}) \left[ 1 - x / (\varepsilon D_m t)^{1/2} \right] \right\} \right)^{1/n}. \quad (18)$$

Здесь  $D_m$  — максимум функции  $D(s_w) = -k / \phi F(s_w) dP_c / ds_w$ , где  $F(s_w)$  определена выражением (10), соответствующая этому максимуму водонасыщенность равна  $s_m$ . Тогда  $c = m / (n s_m^n)$ , где  $m$  и  $n$  — коэффициенты, используемые в аппроксимации функции  $D(s_w)$  зависимостью вида  $D(s_w) = D_0 s_w^m \exp(-c s_w^n)$ , удовлетворяющие условию  $m + 1 = n$ . Относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление имеют следующий вид  $k_{rw} = k_{rw}^0 s_w^m$ ;  $k_{ro} = k_{ro}^0 (1 - s_w)^n$ ;  $P_c = -B \ln s_w$ . Значения параметров, использованных в решении, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения параметров пласта и флюидов, моменты времени

Параметр	Значение	Параметр	Значение	Параметр	Значение
$L$	10 м	$m$	3,5	$k_{rw}^0$	0,2
$c$	12,24	$n$	4,5	$k_{ro}^0$	0,75

Окончание табл. 2

$\phi$	0,3	$\mu_o, \mu_w$	1 мПа·сек	$B$	0,4 МПа
$k$	0,02 мкм <sup>2</sup>	$\mu, \nu$	4	$t_*$	1300 сут.
$D_m$	0,558 мкм <sup>2</sup> /сек	$s_m$	0,542	$\varepsilon$	1,6

Отметим, что аналитическое решение (18) описывает процесс пропитки только на начальном этапе, т. е. справедливо до момента  $t_*$ , когда фронт водонасыщенности достигает правого конца пористой среды ( $x = L$ ). Также в решении (18) положение фронта водонасыщенности принимается равным  $\lambda(t) = (\varepsilon D_m t)^{1/2}$ , где  $\varepsilon$  — эмпирический параметр.

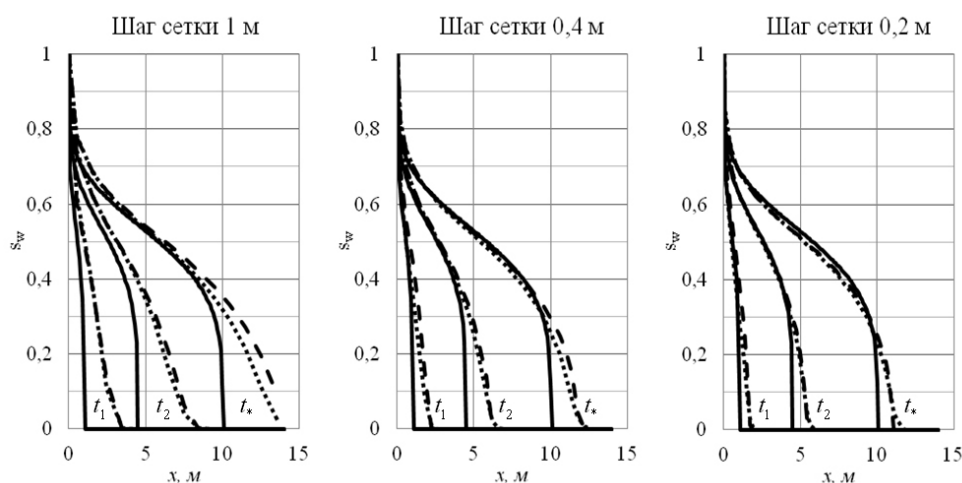


Рис. 6. Водонасыщенность вдоль образца породы для разных размеров сеток в моменты времени  $t_1 = 13$  сут.,  $t_2 = 260$  сут.,  $t_* = 1300$  сут.: сплошная линия — аналитическое решение, пунктир — IMPES, точки — FI

На рис. 6 представлено сравнение аналитического решения (18) и численных решений, полученных на различных сетках с использованием схем IMPES и Full Implicit (FI). Видно, что численное решение приближается к аналитическому с уменьшением шага сетки, наибольшее отклонение от аналитического решения наблюдается вблизи фронта водонасыщенности (движение фронта опережает теоретическую оценку).

**Выводы.** На различных сетках и с использованием различных разностных схем решены три задачи равновесия и фильтрации нефти и воды в пористых средах под действием капиллярных и гравитационных сил. Проведено сравнение полученных результатов с соответствующими аналитическими решениями. Наиболее существенно точность численного решения зависит от размеров сетки при моделировании процесса капиллярной пропитки. Для дальнейшего исследования капиллярных и гравитационных эффектов необходимо получение более общих аналитических решений, учитывающих неоднородность пласта по проницаемости, а также капиллярные и гравитационные силы одновременно.



## ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $\phi$  — пористость  
 $k$  — абсолютная проницаемость  
 $\rho_o, \rho_w$  — плотности нефти и воды в пластовых условиях  
 $\mu_o, \mu_w$  — вязкости нефти и воды в пластовых условиях  
 $u_o, u_w$  — скорости фильтрации нефти и воды  
 $p_o, p_w$  — давления в нефти и в воде  
 $s_o, s_w$  — нефте- и водонасыщенности  
 $k_{ro}, k_{rw}$  — относительные фазовые проницаемости по нефти и воде  
 $P_c$  — капиллярное давление  
 $D$  — глубина

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем: пер. с англ. М.: Недра, 1982. 407 с.
2. Aziz, K., Durlafsky, L., Tchelepi, H. Notes for petroleum reservoir simulation. Stanford: Stanford University, 2005. 490 p.
3. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостехиздат, 1963. 496 с.
4. Майер В.П. Гравитационная сегрегация двух фаз в поровом пласте ограниченной толщины // Нефть и газ. 2001. № 2. С. 57-65.
5. Майер В.П. О тестировании гидродинамических фильтрационных моделей // Вестник ЦКР Роснедра. 2009. № 1. С. 68-78.
6. McWhorter, D., Sunada, D.K. Exact integral solutions for two-phase flow // Water Resour. Res. 1990. Vol. 26. 3. Pp. 399-413.
7. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
8. Kashchiev, D., Firoozabadi, A. Analytical solutions for 1D countercurrent imbibition in water-wet media // SPEJ. 2003. 8(4). Pp. 401-408.
9. Бахтий Н.С. Некоторые аспекты моделирования многофазной многокомпонентной фильтрации и тестирования вычислительных алгоритмов, индуцированные программным комплексом «Техсхема»: дис. ... канд. техн. наук. Тюмень, 2012. 136 с.
10. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.

## REFERENCES

1. Aziz, K., Settari, A. Petroleum Reservoir Simulation. London: Applied Science Publishers Ltd., 1979.
2. Aziz, K., Durlafsky, L., Tchelepi, H. Notes for petroleum reservoir simulation // Stanford: Stanford University. 2005. 490 p.
3. Charny, I.A. Fluid and gas dynamics in porous media. Moscow: State Scientific and Technical Publishers of Oil and Mining-Fuel Literature, 1963. 496 p. (in Russian).
4. Mayer, V.P. Gravity flow of two phases in finite porous media // Oil and Gas. 2001. № 2. Pp. 57-65. (in Russian).
5. Mayer, V.P. About testing of reservoir simulation models // Central Development Commission Rosnedra Herald. 2009. № 1. Pp. 68-78. (in Russian).
6. McWhorter, D., Sunada, D.K. Exact integral solutions for two-phase flow // Water Resour. Res. 1990. Vol. 26. Pp. 399.

7. Barenblatt, G.I. Entov, V.M., Ryzhik, V.M. Theory of nonstationary fluid and gas dynamics in porous media. Moscow: Nedra, 1972. 288 p. (in Russian).
8. Kashchiev, D., Firoozabadi, A. Analytical solutions for 1D countercurrent imbibition in water-wet media // SPEJ. 2003. 8(4). Pp. 401-408.
9. Bakhty, N.S. Particularities of multiphase multicomponent reservoir simulation and verification of numerical solutions of TecScheme software: Ph.D. thesis, Tyumen, 2012. 136 p. (in Russian).
10. Rozhdestvensky, B.L., Yanenko, N.N. Systems of quasi-linear equations and their applications to gas dynamics. Moscow: Nauka, 1978. 688 p. (in Russian).

#### **Авторы публикации**

**Бахтий Николай Сергеевич** — начальник отдела математического моделирования нефтегазовых месторождений Тюменского отделения «СургутНИПИнефть» ОАО «Сургутнефтегаз», доцент кафедры математического моделирования Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, кандидат технических наук

**Абдулина Марина Вадимовна** — заведующая лабораторией отдела математического моделирования нефтегазовых месторождений Тюменского отделения «СургутНИПИнефть» ОАО «Сургутнефтегаз», кандидат физико-математических наук

**Мокропуло Юрий Иванович** — инженер I категории отдела математического моделирования нефтегазовых месторождений Тюменского отделения «СургутНИПИнефть» ОАО «Сургутнефтегаз»

#### **Authors of the publication**

**Nikolay S. Bakhtiy** — Cand. Tech. Sci., Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University Head of Department of Petroleum Reservoir Simulation, Tyumen Branch of Surgut Research and Planning Institute, Surgutneftegas Open Joint Stock Company

**Marina V. Abdulina** — Cand. Phys. and Math. Sci., Head of laboratory, Department of Petroleum Reservoir Simulation, Tyumen Branch of Surgut Research and Planning Institute, Surgutneftegas Open Joint Stock Company

**Yury I. Mokropulo** — Engineer of the 1st grade, Department of Petroleum Reservoir Simulation, Tyumen Branch of Surgut Research and Planning Institute, Surgutneftegas Open Joint Stock Company